

2022-2023 учебный год



МАТЕМАТИКА

ОТВЕТЫ РЭ-2023

8 класс

Максимальное количество баллов за задания:

1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
4	4	4	4	5	5	5	5	36

1. Максимально 4 балла.

Да

Например, Айгуль написала (по порядку) 2, 3, 4, ..., 22, а Айдар – 3, 4, ..., 22.

2. Максимально 4 балла.

Оксана

Заметим, что если какой-то из игроков выпишет на доску число 500 или 999 (назовем такой ход проигрышным), то его противник следующим ходом выпишет число 1000 и выиграет.

Какие числа могут быть выписаны на доску до появления чисел 500 и 999?

Во-первых, это все числа от 1 до 499 (их 499).

Во-вторых, это все числа от 502 до 998 (их 497), так как 502 можно получить из числа 251.

Заметим также, что число 501 может получиться только из числа 500. То есть перед появлением числа 500 или 999 будет сделано $499+497=996$ непроигрышных ходов. Это означает, что проигрышный ход сделает Динара.

3. Максимально 4 балла.

Не может

Пусть на острове живут x рыцарей и y лжецов, а количество пар друзей вида рыцарь – лжец равно D . Рыцари говорят правду, поэтому каждый из них входит хотя бы в 6 таких пар. Каждый лжец имеет не более 10 друзей – рыцарей, поэтому входит не более, чем в 10 таких пар. Следовательно, $6x \leq D \leq 10y$, откуда $x \leq 5y/3 < 2y$, так как какие-то аборигены на острове есть (значит, обязательно есть и лжецы).

Таким образом, рыцарей не может быть вдвое больше, чем лжецов.

4. Максимально 4 балла.

196

В центральную клетку нельзя попасть ни с какой другой. В клетки центральной вертикали (горизонтالي) можно попасть только с клеток этой вертикали. И наоборот, начав с такой клетки, фигура не покинет центральную вертикаль, то есть обойдёт не более 14 клеток.

Оставшиеся $225 - 29 = 196$ клеток обойти можно. Заметим, что за 13 ходов по вертикали мы можем обойти все её клетки (кроме средней), если начнём на одной из соседних со средней клеток, а закончим на другой. Чтобы обойти 196 клеток, стартуем с клетки, соседней по диагонали с центральной, обходим за 13 ходов вертикаль, делаем ход по горизонтали, обходим за 13 ходов новую вертикаль, и т.д. Нетрудно видеть, что за 13 ходов по горизонтали мы побываем на всех вертикалях (они чередуются так же, как и клетки), кроме центральной, и каждый раз будем уходить и приходить на вертикаль через клетку, соседнюю со средней.

5. Максимально 5 баллов.

3

Пример. Будем последовательно красить натуральные числа по возрастанию. 1 и 2 покрасим двумя разными цветами. Для цвета каждого числа $k > 2$ есть не более двух ограничений: оно не может быть одного цвета ни с числом $k/2$, ни с числом $k - 2$. Поэтому для любого такого k обязательно найдется третий цвет.

Оценка. Рассмотрим числа 4, 6 и 8. Любые два из них должны быть покрашены в разные цвета, поэтому цветов не может быть меньше трех.

6. Максимально 5 баллов.

Упорядочим гири по весу: $a_1 < a_2 < \dots < a_{11}$. Заметим, что веса соседних гирь отличаются не меньше, чем на 1, поэтому $a_n \geq a_m + (n - m)$ при $m < n$.

По условию $a_1 + a_2 + \dots + a_6 > a_7 + a_8 + \dots + a_{11} \geq (a_2 + 5) + \dots + (a_6 + 5)$, откуда $a_1 > 25$. Значит, $a_{11} \geq a_1 + 10 > 35$.

7. Максимально 5 баллов.

Пусть O – середина отрезка BD . Точка A лежит внутри окружности с диаметром BD , поэтому $OA < BD/2$. Кроме того, $FO = CD/2$.

Следовательно, $2FA \leq 2FO + 2OA < CD + BD$.

8. Максимально 5 баллов.

Назовем отрезок "особым", если его концы имеют разный цвет. Заметим, что точка является "особой", если более половины выходящих из нее отрезков – "особые". Поэтому при перекрашивании любой "особой" точки общее число "особых" отрезков уменьшается. Поскольку всего "особых" отрезков не меньше нуля, а при каждом шаге их число уменьшается по крайней мере на единицу, мы через конечное число шагов получим систему, в которой ни одну из точек перекрасить нельзя и, следовательно, нет особых точек.